PSEUDO SCHUR COMPLEMENTS DARI MATRIKS BLOK

Kurnia Tandi Palembangan[1], Amir Kamal Amir[2], Jusmawati Massalesse[3]
kurniatandi@yahoo.co.id[1], amirkamir@science.unhas.ac.id[2], jusmawati@gmail.com[3]
[1]Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin
Jln. Perintis Kemerdekaan, Makassar, Indonesia, Kode Pos 90245

PSEUDO SCHUR COMPLEMENTS OF THE BLOCK MATRIX

Kurnia Tandi Palembangan[1], Amir Kamal Amir[2], Jusmawati Massalesse[3]
kurniatandi@yahoo.co.id[1], amirkamir@science.unhas.ac.id[2], jusmawati@gmail.com[3]
[1]Departement of Mathematic, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Hasanuddin University
Perintis Kemerdekaan Street, Makassar, Indonesia, Post Code 90245

ABSTRAK

Secara umum, suatu matriks singular tidak memiliki invers. Tulisan ini mengkaji mengenai bagaimana menentukan pseudo inverse dan pseudo schur complements untuk matriks singular, yaitu suatu matriks dengan sifat-sifat menyerupai invers pada umumnya. Pseudo inverse diperoleh setelah pseudo schur complements diketahui. Penentuan pseudo inverse dilakukan dengan mensubtitusikan pseudo schur complements dari matriks singular U kedalam solusi X sehingga diperoleh solusi baru (dinotasikan dengan $U^{\dagger}$). Dari solusi yang diperoleh, terbukti bahwa $UU^{\dagger} = I$, dan $U^{\dagger}$ memenuhi empat kondisi Penrose yaitu $UXU = U, XUX = X, (UX)^T = UX, (XU)^T = XU$.

Kata kunci : matriks singular, matriks simetris, pseudo inverse , pseudo schur complement.

ABSTRACT

In general, a singular matrix is non invertible. This paper examines how to find pseudo inverse and pseudo schur complements from singular matrices, i.e a matrix with properties like inverse generally. We obtain Pseudo inverse after pseudo schur complements was find. Pseudo inverse will be find, by subtituting pseudo schur complements from singular matrices U into solution X, and we find a new solution (denoted by $U^{\dagger}$). From the obtained solution, proved that $UU^{\dagger} = I$, and $U^{\dagger}$ satisfying four penrose conditions $UXU = U, XUX = X, (UX)^T = UX, (XU)^T = XU$.

Key word : singular matrices, symmetric matrices, pseudo inverse,pseudo schur complements.

1. Pendahuluan

Matriks merupakan pokok bahasan yang dipelajari pada salah satu cabang matematika, yaitu dalam aljabar linear. Matriks pertama kali diperkenalkan oleh seorang matematikawan Inggris Arthur Cayley (1821-1895) pada tahun 1859.

Dalam aljabar, terdapat istilah invers. Invers suatu matriks mempunyai peranan penting dalam penyelesaian sistem persamaan linear. Jika A adalah matriks bujur sangkar berordo $n \times n$ dan terdapat matriks B yang ukurannya sama sedemikian sehingga $AB = BA = I$, maka A dikatakan dapat dibalik (*invertible*) dan B dinamakan invers dari A, ditulis $B = A^{-1}$. Akan tetapi, terdapat juga matriks berordo $n \times n$ dan $m \times n$ dengan $m \neq n$ yang tidak mempunyai invers dan singular.

Pada tulisan ini akan akan dikaji lebih jauh tentang penentuan invers dari matriks blok singular (*Pseudo Inverse*) dengan menggunakan *Pseudo Schur Complement* dari matriks blok singular.

2. Tinjauan Pustaka

2.1 Matriks Blok

Sebuah matriks dapat dibagi atau dipartisi ke dalam sejumlah submatriks dengan cara menyelipkan garis horinzontal atau vertikal diantara baris-baris atau kolom-kolom matriks. Matriks yang terbentuk disebut matriks terpartisi dan submatriks-submatriks di dalamnya disebut blok (elemen blok).

2.2 Transpose Matriks

Definisi Transpose Matriks :

Misalkan A adalah matriks $m \times n$ maka transpose dari matriks A dinotasikan dengan A^T yang didefinisikan menjadi matriks $n \times m$, yang hasilnya diperoleh dengan menukar baris dan kolom dari A. Dimana kolom ke- m dari matriks A^Tadalah baris ke- m dari matriks A.

2.3 Matriks Simetris

Definisi Matriks Simetris :

Suatu matriks A disebut matriks simetris jika matriks A sama dengan matris transposenya, yaitu

$$A = A^T.$$

2.4 Matriks Singular dan Matriks Non Singular
Definisi Matriks Singular dan Matriks Non Singular :
Matriks bujur sangkar A dikatakan singular jika $|A| = 0$, dan non singular jika $|A| \neq 0$.

2.5 Definisi Pseudo Inverse
Definisi Pseudo Inverse :
Misalkan $A \in \mathbb{M}_{n,m}$, terdapat sebuah matriks $A^{\dagger} \in \mathbb{M}_{m,n}$ yang unik, $A^{\dagger}$disebut pseudo inverse dari matriks A jika memenuhi empat kondisi Penrose :

(i) $AA^{\dagger}A = A$
(ii) $A^{\dagger}AA^{\dagger} = A^{\dagger}$
(iii) $(AA^{\dagger})^T = AA^{\dagger}$
(iv) $(A^{\dagger}A)^T = A^{\dagger}A$

Sifat invers semu (pseudo inverse):

a) $A^{\dagger} = A^{-1}$ jika A bujur sangkar nonsingular
b) $(A^{\dagger})^{\dagger} = A$
c) $(A^T)^{\dagger} = (A^{\dagger})^T$
d) $A^{\dagger} = (A^TA)^{-1}A^T$ dan $A^{\dagger}A = I_n$ jika $rank(A) = n$
e) $A^{\dagger} = A^T(AA^T)^{-1}$ dan $AA^{\dagger} = I_m$ jika $rank(A) = m$.

2.6. Pseudo schur complements

Komplemen schur (pseudo schur complements) merupakan salah satu metode atau cara dalam analisis matriks yang banyak menggunakan pertidaksamaan matriks. Dalam teori tentang matriks, komplemen schur biasanya di gunakan pada matriks bujur sangkar yang berukuran besar dimana matriks tersebut telah di blok.

Diberikan matriks :

$$\underset{(p+r)\times(q+S)}{M} = \begin{pmatrix} \underset{p\times q}{A} & \underset{p\times s}{B} \\ \underset{r\times q}{C} & \underset{r\times s}{D} \end{pmatrix}$$

jika D adalah matriks bujur sangkar dan singular, maka didefinisikan pseudo schur complement $(M/D)_{\mathcal{P}}$ dari D pada matriks M

$$(M/D)_{\mathcal{P}} = A - BD^{\dagger}C$$

dimana $D^{\dagger}$ adalah pseudo inverse (Moore-Penrose inverse) dari D.
Sehingga, dapat juga didefinisikan:

$$(M/A)_{\mathcal{P}} = D - CA^{\dagger}B$$
$$(M/B)_{\mathcal{P}} = C - DB^{\dagger}A$$
$$(M/C)_{\mathcal{P}} = B - AC^{\dagger}D.$$

Pseudo schur complement dapat juga didefinisikan untuk matriks partisi yang berukuran $m \times n$. Misalkan diberikan matriks blok $m \times n$:

$$M = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1j} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{i1} & \dots & A_{ij} & \dots & A_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \dots & A_{mj} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}.$$

Untuk mencari pseudo schur complement dari matriks blok $m \times n$ tersebut digunakan persamaan:

$$(M/A_{ij})_{\mathcal{P}} = A^{(ij)} - B_{\boldsymbol{j}}^{(\boldsymbol{i})}A_{\boldsymbol{ij}}^{\dagger}C_i^{(j)}$$

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Bentuk pseudo schur complements dari matriks blok singular

Misalkan diberikan bentuk matriks blok berordo 2×2 yang simetris sebagai berikut :

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & D \end{pmatrix}$$

Sebagai pengembangan dari matriks blok berordo 2×2, diberikan matriks blok berordo 3×3 yang simetris sebagai berikut:

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ B^T & D & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} A & B & E \\ B^T & D & 0 \\ E^T & 0 & C \end{pmatrix}, \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} A & B & E \\ B^T & D & F \\ E^T & F^T & C \end{pmatrix}$$

Pseudo schur complement dari A dalam matriks $\boldsymbol{U}$ sebagai berikut:

1. $(\boldsymbol{U}/A)_{\mathcal{P}} = D - B^T A^\dagger B$
2. $(\boldsymbol{U}/A)_{\mathcal{P}} = C$
3. $(\boldsymbol{U}/A)_{\mathcal{P}} = C - E^T A^\dagger E - E^T A^\dagger B B^T A^\dagger E (D - B^T A^\dagger B)^\dagger$
4. $(\boldsymbol{U}/A)_{\mathcal{P}} = C - E^T A^\dagger E - F^T F (D - B^T A^\dagger B)^\dagger + F^T B^T A^\dagger E (D - B^T A^\dagger B)^\dagger + E^T A^\dagger B F (D - B^T A^\dagger B)^\dagger - E^T A^\dagger B B^T A^\dagger E (D - B^T A^\dagger B)^\dagger$.

3.2 Pseudo inverse dari matriks blok singular

Teorema 3.1 :

Diberikan matriks $U \in \mathbb{M}_{m,n}$ dengan $U = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & D \end{pmatrix}$ yang merupakan matriks simetrik, dengan A, B, B^T, D juga simetrik. Misalkan bahwa $R(B) \subseteq R(A)$ dan $R(B^T A^\dagger) \subseteq R(F)$, dimana $\mathrm{F} = \mathrm{D} - \mathrm{B}^\mathrm{T} \mathrm{A}^\dagger \mathrm{B}$ merupakan pseudo schur complement dari A dalam matriks U. Maka pseudo inverse dari matriks U adalah:

$$U^\dagger = \begin{pmatrix} A^\dagger + A^\dagger B F^\dagger B^T A^\dagger & -A^\dagger B F^\dagger \\ -F^\dagger B^T A^\dagger & F^\dagger \end{pmatrix}$$

Teorema 3.2

Diberikan matriks $U \in \mathbb{M}_{m,n}$ dengan $U = \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ B^T & D & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$ yang merupakan matriks simetrik, dengan A, B, B^T, D, C juga simetrik. Misalkan bahwa $R(B) \subseteq R(A)$ dan $R(B^T A^\dagger) \subseteq R(F)$, dimana $F = D - B^T A^\dagger B$ dan $G = C$ merupakan pseudo schur complement dari A dalam matriks U. Maka pseudo inverse dari matriks U adalah :

$$U^\dagger = \begin{pmatrix} A^\dagger + A^\dagger B F^\dagger B^T A^\dagger & -A^\dagger B F^\dagger & 0 \\ -F^\dagger B^T A^\dagger & F^\dagger & 0 \\ 0 & 0 & G^\dagger \end{pmatrix}.$$

Teorema 3.3

Diberikan matriks $U \in \mathbb{M}_{m,n}$ dengan $U = \begin{pmatrix} A & B & E \\ B^T & D & 0 \\ E^T & 0 & C \end{pmatrix}$ yang merupakan matriks simetrik, dengan A, B, B^T, D, C, E, E^T juga simetrik. Misalkan bahwa $R(E) \subseteq R(B) \subseteq R(A)$ dan $R(B^T A^\dagger) \subseteq R(F)$ dimana $F = D - B^T A^\dagger B$ dan $H = C - E^T A^\dagger E - E^T A^\dagger B B^T A^\dagger E F^\dagger$ merupakan pseudo schur complement dari A dalam matriks U. Maka pseudo inverse dari matriks U adalah :

$$U^\dagger = \begin{pmatrix} DH\mathbb{P}^\dagger + DE^T A^\dagger E \mathbb{P}^\dagger + DE^T A^\dagger B B^T A^\dagger E F^\dagger \mathbb{P}^\dagger & -BH\mathbb{P}^\dagger - BE^T A^\dagger E \mathbb{P}^\dagger - BE^T A^\dagger B B^T A^\dagger E F^\dagger \mathbb{P}^\dagger & -ED\mathbb{P}^\dagger \\ -B^T H \mathbb{P}^\dagger - B^T E^T A^\dagger E \mathbb{P}^\dagger - B^T E^T A^\dagger B B^T A^\dagger E F^\dagger \mathbb{P}^\dagger & AH\mathbb{P}^\dagger + E^T B B^T A^\dagger E F^\dagger \mathbb{P}^\dagger & EB^T \mathbb{P}^\dagger \\ -DE^T \mathbb{P}^\dagger & BE^T \mathbb{P}^\dagger & AD\mathbb{P}^\dagger - BB^T \mathbb{P}^\dagger \end{pmatrix}$$

Teorema 3.4

Diberikan matriks $U \in \mathbb{M}_{m,n}$ dengan $U = \begin{pmatrix} A & B & E \\ B^T & D & F \\ E^T & F^T & C \end{pmatrix}$ yang merupakan matriks simetrik, dengan $A, B, B^T, D, C, E, E^T, F, F^T$ juga simetrik. Misalkan bahwa $R(E) \subseteq R(B) \subseteq R(A)$ dan $R(B^T A^\dagger) \subseteq R(F)$ dimana $F = D - B^T A^\dagger B$ dan $K = C - E^T A^\dagger E - F^T F F^\dagger + F^T B^T A^\dagger E F^\dagger + E^T A^\dagger B F F^\dagger - E^T A^\dagger B B^T A^\dagger E F^\dagger$ merupakan pseudo schur complement dari A dalam matriks U. Maka pseudo inverse dari matriks U adalah:

$$U^\dagger = \begin{pmatrix} (DK + DE^T A^\dagger E + DF^T - DF^T B^T A^\dagger E F^\dagger - DE^T A^\dagger B + DE^T A^\dagger B B^T A^\dagger E F^\dagger - FF^T)\mathcal{N} & (EF^T - BK - BE^T A^\dagger E - BF^T + BF^T B^T A^\dagger E F^\dagger + BE^T A^\dagger B - BA^\dagger B B^T A^\dagger E F^\dagger)\mathcal{N} & BF\mathcal{N} - ED\mathcal{N} \\ (FE^T - B^T K - B^T E^T A^\dagger E + F^T + B^T F^T B^T A^\dagger E F^\dagger + B^T E^T A^\dagger B - B^T E^T A^\dagger B B^T A^\dagger E F^\dagger)\mathcal{N} & (AK + AE^T A^\dagger E + AF^T - AF^T B^T A^\dagger E F^\dagger - AE^T A^\dagger B + AE^T A^\dagger B B^T A^\dagger E F^\dagger - EE^T)\mathcal{N} & EB^T\mathcal{N} - AF\mathcal{N} \\ B^T F^T \mathcal{N} - DE^T \mathcal{N} & BE^T \mathcal{N} - AF^T \mathcal{N} & AD\mathcal{N} - BB^T \mathcal{N} \end{pmatrix}$$

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan hasil studi yang telah dilakukan mengenai pseudo schur complements dan pseudo inverse dari matriks blok singular, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Pseudo schur complements merupakan salah satu metode dalam analisis matriks yang banyak menggunakan pertidaksamaan matriks. Pseudo schur complements digunakan pada matriks berukuran besar yang telah di partisi (matriks blok). Dari beberapa jenis matriks yang diberikan, diperoleh bentuk pseudo schur complement dari setiap matriks sebagai berikut:
   1. $(\boldsymbol{U}/A)_{\mathcal{P}} = D - B^T A^\dagger B$
   2. $(\boldsymbol{U}/A)_{\mathcal{P}} = C$
   3. $(\boldsymbol{U}/A)_{\mathcal{P}} = C - E^T A^\dagger E - E^T A^\dagger B B^T A^\dagger E (D - B^T A^\dagger B)^\dagger$
   4. $(\boldsymbol{U}/A)_{\mathcal{P}} = C - E^T A^\dagger E - F^T F \left(D - B^T A^\dagger B\right)^\dagger + F^T B^T A^\dagger E \left(D - B^T A^\dagger B\right)^\dagger + E^T A^\dagger B F \left(D - B^T A^\dagger B\right)^\dagger - E^T A^\dagger B B^T A^\dagger E \left(D - B^T A^\dagger B\right)^\dagger$.

2. Pseudo inverse yang dinotasikan dengan $A^\dagger$ merupakan invers dari matriks singular. pseudo inverse dari matriks blok singular yang diberikan diperoleh setelah mensubtitusi bentuk pseudo schur complement dari matriks tersebut. Adapun pseudo inverse dari masing-masing matriks blok singular yang diberikan, dinotasikan dengan $U^\dagger$.

DAFTAR PUSTAKA

Hadley, G. (1983). *Aljabar Linier.* Jakarta: Erlangga.

Https://atikahsuryaniulfah.word press.com/category/sejarah-matriks/ diakses pada tanggal 21 April 2016.

MacAusland, R. (2014). The Moore-Penrose Inverse and Least Squares. *Math 420: Advanced Topics in Linear Algebra*.

Rorres, H., & Anton, C. (2005). *Aljabar Linear Elementer Jilid II.* Jakarta: Erlangga.

Sivakumar, K. C.; Meenakshi, Ar.; and Choudhury, Projesh Nath. (2015), *Almost Definite Matrices Revisited*, *Electronic Journal of Linear Algebra*, Volume 29, pp. 102-119.

Zaglia, M. R. (2004). Pseudo-Schur Complements and their properties. *Appl. Numer Math 50*, 511-519.